

Prednáška 6

6.1. Plochy ako variety

Plochy sú bežne vyskytujúce sa variety aj v praktickej fyzike. Pojem variety teda nie je iba fundamentálnym pojmom diferenciálnej geometrie. Na varietach často zavádzame dodatočné štruktúry. Príkladom sú napr miery, vďaka ktorým môžeme používať integrálny počet, Riemannovské variety, na ktorých sú definované vzdialenosti, uhly, krivosť a pod., alebo pseudo-Riemannovské variety, ktoré modelujú časopriestor v teórii relativity. Môžeme tiež spomenúť teóriu polí (elektromagnetizmus a ďalšie kalibračné polia), priestory riešení diferenciálnych rovníc, či Lieove grupy. Tak napríklad matematické kyvadlo dĺžky l má ako konfiguračný priestor¹ tie body $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, pre ktoré platí

$$\Phi(\mathbf{r}) = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0.$$

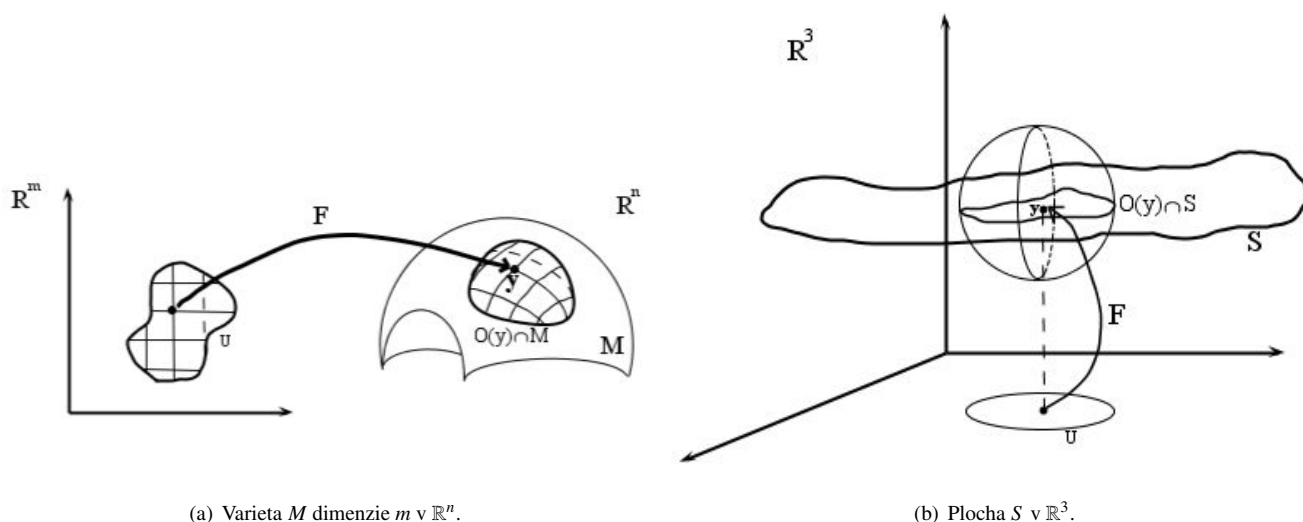
To, čo zostane, je sféra $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. A napríklad stav ideálneho plynu je daný trojicou čísel $(p, V, T) \subset \mathbb{R}^3$, ktoré sú viazané stavovou rovnicou

$$\Phi(p, V, T) = pV - RT = 0$$

(plus sú tam ďalšie obmedzenia na intervaly hodnôt). To, čo zostane, je istá dvojrozmerná plocha v \mathbb{R}^3 . Úplne všeobecne (a vágne) možno variety charakterizovať ako "spojitý priestor, ktorý je lokálne kartézsky a možno na ňom vykonávať derivovanie"². Varietou teda nie je napríklad množina racionálnych čísel.

¹ V klasickej mechanike, "parametre" ktoré definujú konfiguráciu systému sa nazývajú tzv. zovšeobecnené súradnice, a vektorový priestor definovaný týmito súradnicami sa nazýva konfiguračný priestor fyzikálneho systému.

² Nemusí byť pritom dokonca ani metrický, euklidovský, afinný, apod.



Obr. 6.1: Homeomorifzmus okolí.

Definícia 6.1.1.

Nech $m, n \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq n$. Hovoríme, že množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je **m -rozmerná nadplocha v n -rozmernom priestore**, ak ku každému $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in M$ existuje jeho okolie $O(\mathbf{y})$ v \mathbb{R}^n , otvorená množina $U \subset \mathbb{R}^m$ a prosté spojité zobrazenie (**homeomorfizmus**) $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tak, že $\mathbf{y} \in \mathbf{F}(U) = O(\mathbf{y}) \cap M$. Ak je zobrazenie \mathbf{F} navyše regulárne, hovoríme, že M je m -rozmerná (diferencovateľná) **varieta** v n -rozmernom priestore.

Zhruba povedané je teda varieta M dimenzie m množina bodov, ktorá je lokálne podobná kartézskému priestoru \mathbb{R}^m (okolie je homeomorfné s otvorenou množinou v \mathbb{R}^m), čiže okolie každého bodu môže byť parametrizované m nezávislými súradnicami.

Poznámka 6.1.2.

Homeomorifzmus \mathbf{F}^{-1} sa zvykne nazývať aj súradnicové zobrazenie, dvojica (V, \mathbf{F}^{-1}) , $V = M \cap O(\mathbf{y})$ **mapa** a súbor máp zasa **atlas** (predstavte si sféru ako povrch zeme a rozmyslite si, prečo).

Poznámka 6.1.3.

Zobrazenie \mathbf{F}^{-1} pritom zavádza na V lokálny súradnicový systém, ktorý je inverzným obrazom \mathbf{F} kartézského systému \mathbb{R}^m , čiže pre $\mathbf{y} \in V$

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{y}) = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

- n -rozmerné nadplochy (variety) v n -rozmernom priestore sú otvorené množiny.
- Jednorozmerné nadplochy sa nazývajú krivky, dvojrozmerné nadplochy sa nazývajú **plochy**.
- Jednorozmerné variety se nazývajú hladké krivky, dvojrozmerné variety sa nazývajú hladké plochy.

Príklad 6.1.4.

Nech $n = 3, m = 2$. Množina M je hladkou plochou, akk je splnená 1 z 2 podmienok

- M sa dá v okolí $A = (a_1, a_2, a_3)$ vyjadriť rovnicou $x_3 = \psi(x_1, x_2)$, kde ψ je funkcia triedy C^1 v okolí bodu (a_1, a_2) a $\psi(a_1, a_2) = a_3$.
- M má v okolí $A = (a_1, a_2, a_3)$ C^1 parametrizáciu

$$x_1 = \psi_1(u_1, u_2),$$

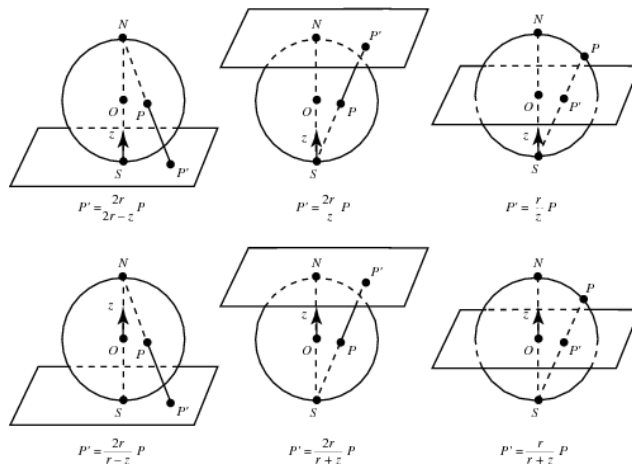
$$x_2 = \psi_2(u_1, u_2),$$

$$x_3 = \psi_3(u_1, u_2),$$

kde $(u_1, u_2) \in S(\mathbf{b}, \delta)$, $x_j(\mathbf{b}) = a_j$, $j = 1, 2, 3$ a aspoň jeden z jakobiánov $J_{(\psi_1, \psi_2)}$, $J_{(\psi_3, \psi_1)}$, $J_{(\psi_2, \psi_3)}$ je nenulový pre všetky $(u_1, u_2) \in S(\mathbf{b}, \delta)$.

Príklad 6.1.5.

Napríklad kružnica S^1 je lokálne ako \mathbb{R} a sféra S^2 je lokálne ako \mathbb{R}^2 .



Obr. 6.2: Stereografické projekcie sféry.

Príklad 6.1.6.

Uvažujme sféru $S^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}, \|\mathbf{x}\| = 1\}$. Sféru rozdel' me na dve podmnožiny, $U := S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ a $V := S^n \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\}$ (ide o sféru bez južného resp. severného pólu). Definujme atlas zložený z dvoch máp (tzv. stereografická projekcia):

$$f_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \mapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right),$$

$$f_2 : V \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \mapsto \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right).$$

Prechodová funkcia je potom guľ'ová inverzia $f_1 \circ f_2^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\mathbf{x} \mapsto \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}$. Je to hladká funkcia, a preto sféra s týmto atlasom tvorí hladkú varietu.

Príklad 6.1.7.

(Dvojité) kužeľ $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ v okolí vrchola $(0, 0, 0)$ nie je nadplochou dimenzie 2 v \mathbb{R}^3 ale množina tvorená (ne)rovnícami $x^2 - y^2 - z^2 = 0$, $z \geq 0$ už áno. Je táto množina varietou (hladkou plochou)?

Príklad 6.1.8.

Otvorené množiny v \mathbb{R}^n sú dokonca analytické variety.

Nasledujúci príklad nám ukazuje, prečo musíme vo všeobecnosti hovoriť o ploche ako o súbore máp a nie iba jednej mape.

Príklad 6.1.9.

Jednotková sféra S^2 v \mathbb{R}^3 je zrejme plochou. Poznáme jej parametrizáciu

$$\mathbf{F}(\theta, \phi) = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin(\theta))$$

a vieme, že toto zobrazenie nie je prosté a tým pádom nemôže byť homeomorfizmus. Aby sme pokryli celú sféru stačí uvažovať $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Avšak množina týchto bodov nie je otvorená v \mathbb{R}^2 a teda nemôže byť použitá ako definičný obor v dvojici mapey. Najväčšou možnou otvorenou množinou je

$$V = \left\{ (\theta, \phi) : -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \phi < 2\pi \right\}.$$

Ale obraz V pri zobrazení \mathbf{F} nie je celá sféra. Takže aby sme ukázali, že sféra je plocha, musíme použiť ešte aspoň jednu mapu, ktorá pokryje zvyšok (o akú množinu ide?).

Podobne ako u kriviek, aj u plôch môžeme zdefinovať istú ekvivalenciu a teda reparametrizáciu, ktorá nám zachová geometrické vlastnosti plôch.

Veta 6.1.10.

Nech U, \tilde{U} sú otvorené množiny v \mathbb{R}^2 a nech $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ je regulárny homeomorfizmus. Nech ďalej $\Phi : \tilde{U} \rightarrow U$ je bijektívne C^1 zobrazenie s C^1 inverziou (difeomorfizmus), potom $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \circ \Phi : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ je regulárny homeomorfizmus.

Zobrazenie Φ nazývame reparametrizáciou (máp).

Príklad 6.1.11.

Vezmime si paraboloid tvorený grafom funkcie $z(x, y) = x^2 + y^2$. Ľahko ho možno parametrizovať (keďže ide o explicitné vyjadrenie stačí nám jedna mapa) ako zobrazenie $\mathbf{F} = (s, t, s^2 + t^2)$, $(s, t) \in \mathbb{R}^2$. Zrejme $\Phi = (u + v, u - v)$ je difeomorfizmus \mathbb{R}^2 na \mathbb{R}^2 a teda $\tilde{\mathbf{F}} = (u + v, u - v, 2(u^2 + v^2))$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ je regulárny homeomorfizmus (parametrizácia paraboloidu).

Táto definícia nás privedie k veľmi dôležitému princípu. Môžeme tak totiž definovať nejakú vlastnosť plochy za predpokladu, že ju môžeme definovať pre ľubovoľnú hladkú mapu tak, že sa nezmení, ak ju reparametrizujeme. Vezmime si príklad definície hladkého zobrazenia z plochy na plochu, $\mathbf{f} : S_1 \rightarrow S_2$. Predpokladajme, že $S_i, i = 1, 2$ vieme pokryť jednou mapou $\sigma_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^3$. Keďže sú to bijekcie má zmysel hovoriť o zobrazení $\sigma_2^{-1} \circ \mathbf{f} \circ \sigma_1 : U_1 \rightarrow U_2$ ako o zobrazení medzi euklidovskými priestormi \mathbb{R}^2 . Povieme, že \mathbf{f} je hladké, ak toto zobrazenie je hladké (to už máme definované). Treba však overiť, že takáto definícia je v poriadku. Teda, ak $\tilde{\sigma}_i : \tilde{U}_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ sú reparametrizované σ_i s reparametrizáciami $\Phi_i : \tilde{U}_i \rightarrow U_i$, $i = 1, 2$, tak musí platiť, že $\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ \mathbf{f} \circ \tilde{\sigma}_1 : \tilde{U}_1 \rightarrow \tilde{U}_2$ je hladké, ak $\sigma_2^{-1} \circ \mathbf{f} \circ \sigma_1 : U_1 \rightarrow U_2$ je hladké. To je však pravda, keďže $\tilde{\sigma}_2^{-1} \circ \mathbf{f} \circ \tilde{\sigma}_1 = \Phi_2^{-1} \circ (\sigma_2^{-1} \circ \mathbf{f} \circ \sigma_1) \circ \Phi_1$. Takto možno previesť podobne aj ďalšie vlastnosti zobrazení medzi euklidovskými priestormi.

Príklad 6.1.12.

Parametrizujme valec ako $\sigma_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, kde $\sigma_2(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi\}$. ďalej uvažujme zobrazenie $\sigma_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\sigma_1(u, v) = (0, u, v)$. Potom pre $f(0, u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ platí $(f \circ \sigma_1)(u, v) = \sigma_2(u, v)$ platí $\sigma_2^{-1} \circ f \circ \sigma_1 = (u, v) = \text{id na } U$.

Ak máme danú plochu implicitne (aspoň lokálne), tak nasledujúca veta nám dáva postačujúcu podmienku na to, aby sme určili, či ide o hladkú plochu (varietu).

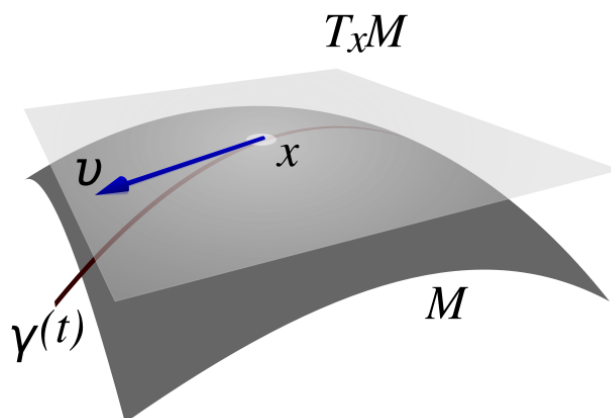
Veta 6.1.13.

Nech S je podmnožina \mathbb{R}^3 taká, že pre každý bod $P \in S$ existuje otvorené okolie W a C^1 zobrazenie $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ také, že

(i) $S \cap W = \{(x, y, z) \in W : f(x, y, z) = 0\}$;

(ii) aspoň jedna z $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ je nenulová v P .

Potom S je hladká plocha.



Obr. 6.3: Dotykový priestor.

Príklad 6.1.14.

Pre jednotkovú sféru S^2 vezmime $W = \mathbb{R}^3$ a $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Potom $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$, takže $\|\nabla f\| = 2$ pre všetky body S^2 . Podľa predchádzajúcej vety musí byť sféra plochou.

Problém 6.1.15.

Rozmyslite si, ako je to s kuželom.

Definícia 6.1.16.

Dotykový priestor $T_x M$ variety M v bode x definujeme ako množinu dotykových vektorov v bode x všetkých kriviek $(\gamma : U \subset \mathbb{R} \rightarrow M, x \in U)$ v M prechádzajúcich x .

Veta 6.1.17.

Nech $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ je mapa plochy S a (u, v) sú koordináty v U . Dotykový priestor $T_x S$ je vektorový podpriestor \mathbb{R}^3 generovaný vektormi

$$\sigma_u = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0), \sigma_v = \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0),$$

kde $\sigma(u_0, v_0) = x$.

Keďže vektory, ktoré generujú tento priestor sú lineárne nezávislé, jeho dimenzia je 2 a ide teda o rovinu. Takto

sa dá definovať aj tangenciálny priestor pre abstraktnejšie variety, kde už o plochu v klasickom zmysle nejde. Všimnime si, že definícia dotykového priestoru nie je závislá na voľbe mapy obsahujúcej bod x . K dotykovej rovine už nie je problém definovať jednotkový vektor normály ako

$$\mathbf{N}_\sigma = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}.$$

Na rozdiel od roviny nie je definovaný jednoznačne v závislosti na mape. Ak si vezmeme inú mapu $\tilde{\sigma} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ z atlasu plochy S obsahujúcu bod x , tak $\mathbf{N}_{\tilde{\sigma}} = \pm \mathbf{N}_\sigma$, kde znamienko určí jakobián reparametrizácie. A tak je nutné definovať nasledujúcu vlastnosť plôch. Platí $\tilde{\sigma}_{\tilde{u}} \times \tilde{\sigma}_{\tilde{v}} = J_\Phi \sigma_u \times \sigma_v$, kde Φ je reparametrizácia medzi dvoma mapami $\sigma, \tilde{\sigma}$.

Definícia 6.1.18.

Orientovateľná plocha je taká plocha, ktorej reparametrizácia Φ medzi ľubovoľnými dvoma mapami v atlase má kladný jakobián (tam kde je Φ definovaná) - súhlasná orientácia.

Orientácia plochy vlastne znamená, že možno hovoriť o dvoch stranách plochy, jedna sa označí za kladnú a druhá za zápornú.

Veta 6.1.19.

Ak plocha S má jednotkový normálový vektor \mathbf{N} definovaný v každom bode $x \in S$ a to zobrazenie $x \mapsto \mathbf{N}$ je hladké, potom S je orientovateľná.

Príklad 6.1.20.

- Nech $D \subset \mathbb{R}^2$ je oblasť, $f(x, y, z) = z - \phi(x, y) = 0$, $\phi \in C^1(D, \mathbb{R})$, potom $\nabla f = (p, q, 1) = (-\phi_x, -\phi_y, 1)$ a vektory

$$\left(\frac{-p}{\pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \frac{-q}{\pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \frac{1}{\pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}} \right)$$

určujú 2 spojité polia jednotlivých normál k ploche.

- Majme plochu z príkladu 6.1.4, potom vektory

$$\left(\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right),$$

kde $C = J_{(\psi_1, \psi_2)}$, $B = J_{(\psi_3, \psi_1)}$, $A = J_{(\psi_2, \psi_3)}$ určujú 2 spojité polia jednotlivých normál k ploche.

Príklad 6.1.21.

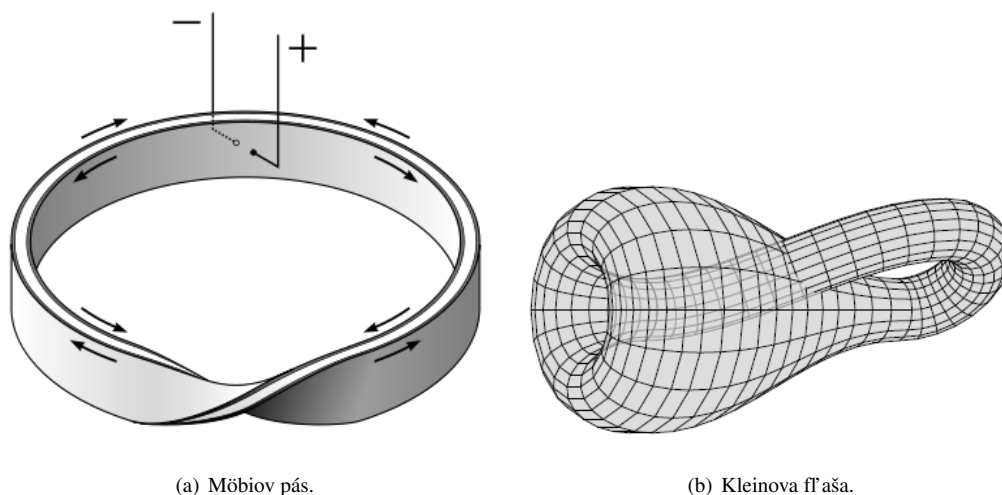
Príklad neorientovateľnej plochy je Möbiov list (páska)

$$\sigma(t, \alpha) = \left(\left(1 + t \cos \frac{\alpha}{2}\right) \cos \alpha, \left(1 - t \sin \frac{\alpha}{2}\right) \sin \alpha, t \cos \frac{\alpha}{2} \right),$$

kde α a t sú parametre, pre ktoré platí $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $p_{min} \leq p \leq p_{max}$. Hodnoty p_{min} a p_{max} určujú šírku pásky, napr. z intervalu $(-1, 1)$. Zrátajme N_σ pre $t = 0$. Máme $\sigma_t \times \sigma_\alpha = (-\cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha, -\cos \frac{\alpha}{2} \sin \alpha, -\sin \frac{\alpha}{2})$, ale

$$N = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} N_\sigma = (-1, 0, 0) \neq (1, 0, 0) = \lim_{\alpha \rightarrow 2\pi^-} N_\sigma.$$

6.1.22. Príklady plôch



(a) Möbius pás.

(b) Kleinova fľaša.

Obr. 6.4: Príklady neorientovateľných variet.

Definícia 6.1.23.

Kvadratická plocha je definovaná (v \mathbb{R}^3) rovnicou v tvare

$$\mathbf{r} \mathbf{A} \mathbf{r}^T + \mathbf{b} \mathbf{r}^T + c = 0,$$

kde $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{A} \in M_{3 \times 3}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}$.

Veta 6.1.24.

Každá kvadratická plocha s nenulovými koeficientami môže byť transformovaná (až na tuhé (rigídne) zobrazenia^a) na jednu z nasledujúcich plôch (v kartézskych súradniciach), $a, b, c \neq 0$

- (i) Elipsoid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
- (ii) Jednodielny hyperboloid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
- (iii) Dvojdielny hyperboloid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$
- (iv) Eliptický paraboloid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$
- (v) Hyperbolický paraboloid: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$
- (vi) Kužeľová plocha: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$
- (vii) Eliptická valcová plocha: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- (viii) Hyperbolická valcová plocha: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
- (ix) Parabolická valcová plocha: $x^2 + 2ay = 0$
- (x) Rovina: $x = 0$
- (xi) 2 rovnobežné roviny: $x^2 = a^2$
- (xii) 2 sečné roviny: $x^2 = y^2 a^2 b^2$
- (xiii) Priamka: $x^2 b^2 + y^2 a^2 = 0$
- (xiv) Bod: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$

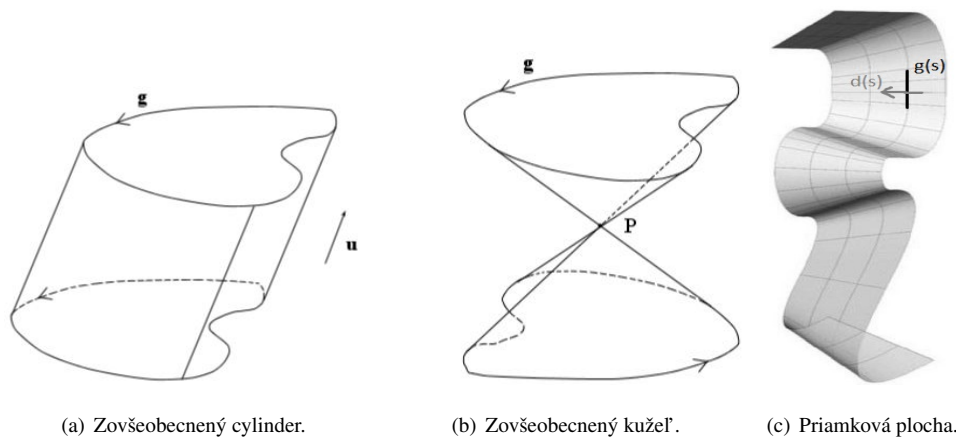
^aZ angl. rigid motions - zobrazenia, ktoré zachovávajú vzdialenosti (izometria), napr. reflexia, rotácia, translácia.

Zovšeobecný valec (cylinder) je plocha, ktorá vznikne posunutím krivky. Ak $\mathbf{g} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ je krivka a \mathbf{u} je jednotkový vektor v smere posunu, potom $\mathbf{v}(s, t) = \mathbf{g}(s) + t \mathbf{u}$ je zrejme prosté, hladké zobrazenie. \mathbf{v} je regulárne, ak dotykový vektor nie je rovnobežný s \mathbf{u} . Najjednoduchší prípad je, ak krivka je rovinná a smer posunu je kolmý na rovinu, v ktorej leží.

Problém 6.1.25.

Ako je to potom s regularitou?

Zovšeobecný kužeľ je plocha, ktorá je zjednotením priamok prechádzajúcich fixným bodom a bodmi krivky.



Obr. 6.5: Príklady plôch.

Nech p je ten bod a $\mathbf{g} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$. Potom $\mathbf{v}(s, t) = (1 - t)p + t\mathbf{g}(s)$ je zrejme hladké zobrazenie.

Problém 6.1.26.

Ako je to s injektívnosťou a regularitou?

Priamková plocha vznikne pohybom priamky v priestore \mathbb{R}^3 . Nech $\mathbf{g} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ je krivka a $\mathbf{d}(s)$ je nenulový vektor v smere priamky prechádzajúcej $\mathbf{g}(s)$, potom $\mathbf{v}(s, t) = \mathbf{g}(s) + t\mathbf{d}(s)$ je hladká parametrizácia takejto plochy.

Problém 6.1.27.

Ako je to s injektívnosťou a regularitou?

Rotačná plocha vznikne rotáciou rovinatej krivky (profilovej krivky) okolo priamky. Zoberme os z za os rotácie, potom pre profilovú krivku $\mathbf{g}(s) = (f(s), 0, g(s))$ dostaneme parametrizáciu rotačnej plochy

$$\mathbf{v}(s, t) = (f(s) \cos t, f(s) \sin t, g(s)).$$

Problém 6.1.28.

Ako je to s injektívnosťou a regularitou?

6.2. Regulárne transformácie

Uvažujme zobrazenie

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad \rho > 0, \phi \in \mathbb{R}.$$

Toto zobrazenie zobrazuje pravú polrovinu $M = \{(\rho, \phi), \rho > 0, \phi \in \mathbb{R}\}$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Avšak nie je prosté na M . Ako už ale vieme, je regulárne. Regulárne zobrazenia prevádzajú krivky na krivky a plochy na plochy.

Transformácie dávajú do vzájomného vzťahu súbor hodnôt x_1, x_2, \dots, x_n a q_1, q_2, \dots, q_n pomocou systému rovníc tvaru

$$\begin{aligned} x_1 &= k_1(q_1, \dots, q_n) \\ x_2 &= k_2(q_1, \dots, q_n) \\ &\vdots \\ x_n &= k_n(q_1, \dots, q_n). \end{aligned} \tag{6.1}$$

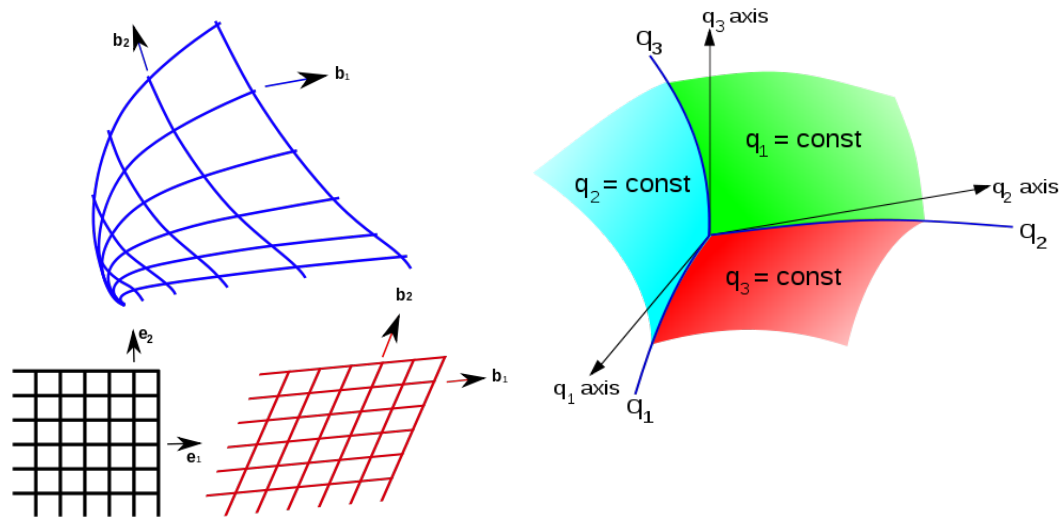
My ich potrebujeme kvôli integrálnemu počtu, zavádzaniu krivočiarych súradníc, či diferenciálnym rovniciam. Na zobrazenie \mathbf{k} sa možno pozerat' dvoma spôsobmi. \mathbf{q} sú súradnice vzoru a \mathbf{x} súradnice obrazu v rovnakej (kartézskej) sústave pri zobrazení \mathbf{k} . Alebo považujeme \mathbf{x} za súradnice bodov v kartézskej sústave a \mathbf{q} za "krivočiaré" súradnice tých istých bodov. Geometrický zmysel je niekedy zrejmý.

Poznámka 6.2.1.

Prevodná funkcia \arccos však funguje iba na intervale $\theta \in [0, \pi]$ - pre zvyšok intervalu by sme museli zmeniť znamienko a tak si definujeme

$$\operatorname{acos}(x, y) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{ak je } y \geq 0, \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{ak je } y < 0 \end{cases}$$

Zavedieme si nasledujúce bijektívne korešpondencie základných sústav, ktoré sa často používajú nielen vo fyzike.



(a) Krivočiare, afinné a kartézské súradnice v 2-D priestore. (b) Súradnicové plochy, krivky a osi všeobecných krivočiarych súradníc.

Obr. 6.6: Krivočiare súradnice.

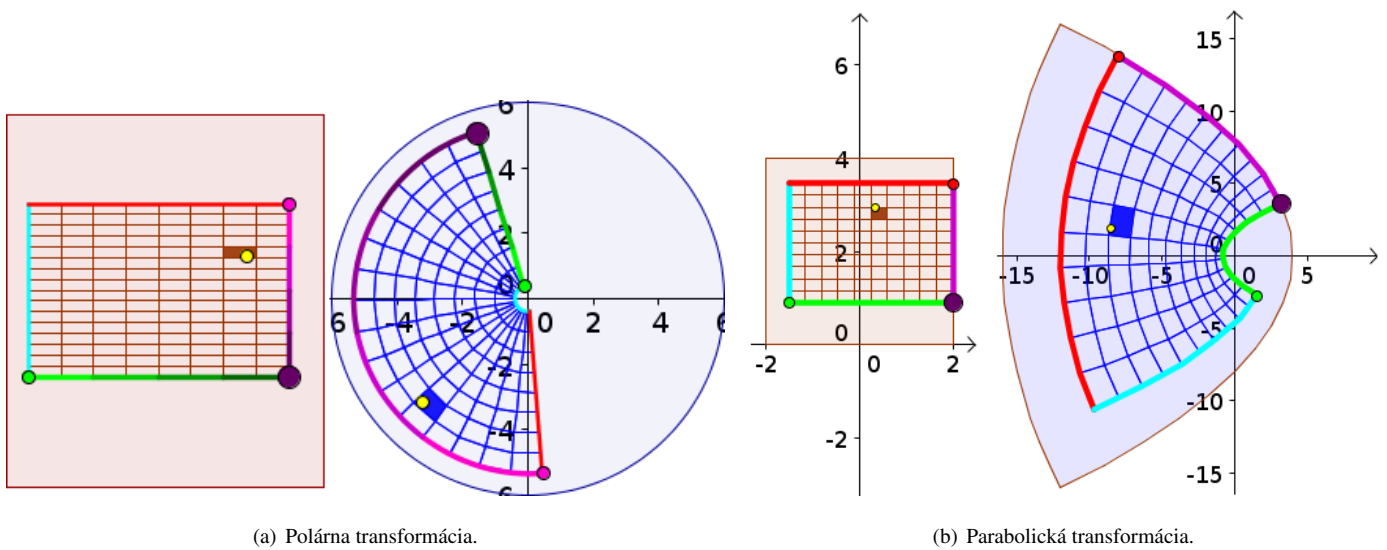
Príklad 6.2.2.

Transformácia φ polárnych súradníc na kartézské a naopak:

$$x = r \cos \theta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r \sin \theta, \quad \theta = \arccos(x, y)$$

kde $-\pi < \theta \leq \pi$, $r > 0$.



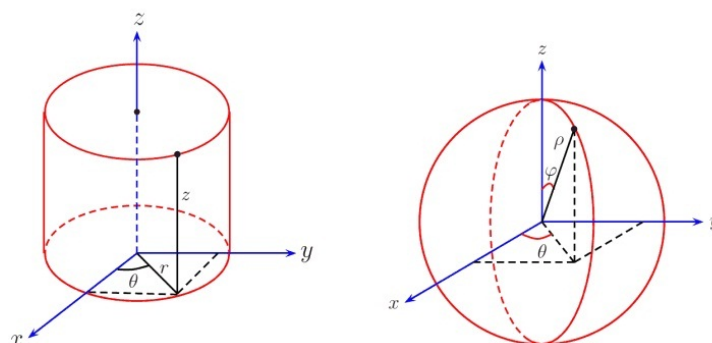
Obr. 6.7: Nelineárne transformácie.

Príklad 6.2.3.

Transformácia cylindrických súradníc na kartézské a naopak:

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \theta, & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 y &= r \sin \theta, & \theta &= \arccos(x/r) \\
 z &= z, & z &= z,
 \end{aligned}$$

kde $-\pi < \theta \leq \pi$, $r > 0$.



Obr. 6.8: Cylindrické a sférické sústavy súradníc.

Príklad 6.2.4.

Transformácia sférických súradníc na kartézské a naopak

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad \theta = \operatorname{acos} \left(\frac{x}{\rho \sin \phi}, y \right)$$

$$z = \rho \cos \phi, \quad \phi = \operatorname{arccos} \left(\frac{z}{\rho} \right),$$

kde $-\pi < \theta \leq \pi$, $0 < \phi < \pi$, $\rho > 0$.

Problém 6.2.5.

Prepíšte rovnicu

$$y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

do polárnych súradníc.

ďalšie bežne sa vyskytujúce krivočiare súradnice sú:

(a) Zovšeobecnené polárne súradnice :

$$\mathbf{r} = (ar \cos^\alpha \theta, br \sin^\alpha \theta), \quad a, b, \alpha > 0, \quad -\pi < \theta \leq \pi, \quad r > 0$$

(b) Zovšeobecnené cylindrické súradnice :

$$\mathbf{r} = (ar \cos^\alpha \theta, br \sin^\alpha \theta, z), \quad a, b, \alpha > 0, \quad -\pi < \theta \leq \pi, \quad r > 0$$

(c) Zovšeobecnené sférické súradnice :

$$\mathbf{r} = (a\rho \sin^\alpha \phi \cos^\beta \theta, b\rho \sin^\alpha \phi \sin^\beta \theta, c\rho \cos^\alpha \phi), \quad a, b, \alpha, \beta > 0, \quad -\pi < \theta \leq \pi, \quad 0 < \phi < \pi, \quad r > 0$$

(d) Sférické súradnice v \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos \phi_1, \\ &\vdots \\ x_j &= \rho \cos \phi_j \prod_{i=1}^{j-1} \sin \phi_i, \\ &\vdots \\ x_n &= \rho \sin \phi_1 \dots \sin \phi_{n-2} \sin \phi_{n-1}, \end{aligned}$$

kde $\phi_i \in (0, \pi)$, $i = 1, \dots, n-2$, $\phi_{n-1} \in (-\pi, \pi]$, $\rho > 0$.

Definícia 6.2.6.

Súradnice \mathbf{q} z (6.1) sa nazývajú **ortogonálne**, ak vektory $\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial q_i}$, $\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial q_j}$ sú kolmé pre $i \neq j$.

Problém 6.2.7.

Overte, že polárne, sférické, a cylindrické súradnice sú ortogonálne. Overte, či sú ortogonálne ich zovšeobecnenia.

Ďalšími ortogonálnymi súradnicami sú napríklad parabolické, eliptické, bipolárne, či toroidálne súradnice.

Poznámka 6.2.8.

Pripomeňme, že polohový vektor má v \mathbb{R}^3 vzhľadom na štandardnú bázu súradnice $\mathbf{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. V daných ortogonálnych krivočiarych súradniciach je to $\mathbf{r} = k_1(q_1, q_2, q_3)\vec{i} + k_2(q_1, q_2, q_3)\vec{j} + k_3(q_1, q_2, q_3)\vec{k}$. Ak si v rovniciach $\mathbf{r} = \mathbf{k}(q_1, q_2, q_3)$ fixneme $q_2 = c_2, q_3 = c_3$, potom tzv. súradnicová krivka je daná parametrizáciou $\mathbf{s}_1(q_1) = \mathbf{k}(q_1, c_2, c_3)$. Obdobne dostaneme ďalšie dve súradnicové krivky, $\mathbf{s}_i(q_i), i = 2, 3$. Zrejme vektor $\mathbf{s}'_i(q_i)$ je tangenciálny, nie nutne jednotkový (prečo?). Teda vektor

$$\mathbf{h}_i := \frac{\partial \mathbf{k}(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_i}, i = 1, 2, 3$$

je tangenciálny ku ostatným dvom súradnicovým krivkám.

Definícia 6.2.9.

Koeficienty $h_i = \|\mathbf{h}_i\|, i = 1, 2, 3$, nazývame aj **Lamého koeficienty** pre ortogonálny krivočiary systém súradníc (q_1, q_2, q_3) .

Poznámka 6.2.10.

Lamého koeficienty nemusia byť vo všeobecnosti konštantné a môžu byť funkciami. Napríklad pre sférické súradnice sú to $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \phi$.

Pri integrovaní sme sa už stretli s prechodom do iných (ortogonálnych) súradníc a koeficienty tvoria vlastne faktor, ktorý určuje, či dané zobrazenie lokálne roztáhuje, alebo sťahuje (mení objem) - $|\det J| = h_1 h_2 h_3$:

$$\int_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_B f(q_1, q_2, q_3) h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3.$$

Použitím týchto koeficientov môžeme získať jednotkové dotykové vektory

$$\vec{h}_i = \frac{\mathbf{h}_i}{h_i}, i = 1, 2, 3,$$

teda krivočiary orthonormálnu bázu. Niekedy sa používa aj označenie $\vec{e}_{q_i}, i = 1, 2, 3$, aby sa zdôraznila sústava, v ktorej pracujeme.

Lema 6.2.11.

(a) Krivočiara orthonormálna báza vyjadrená pomocou štandardnej bázy má vyjadrenie

$$\vec{h}_i = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \vec{e}_j.$$

(b) Štandardná báza vyjadrená pomocou krivočiarej orthonormálnej bázy má vyjadrenie

$$\vec{e}_i = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{h_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \vec{h}_j.$$

Lema 6.2.12.

(a) Derivácie Lamého koeficientov majú vyjadrenie

$$\frac{\partial h_i}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{h_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial^2 x_k}{\partial q_j \partial q_i}.$$

(b) Pre $\forall i, j = 1, 2, 3$ máme

$$\frac{\partial \vec{h}_i}{\partial q_j} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial q_i} \vec{h}_j - \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{h_k} \frac{\partial h_i}{\partial q_k} \vec{h}_k.$$

Lema 6.2.13.

Gradient $\nabla = \sum_{i=1}^n \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ má v krivočiarych ortogonálnych súradniciach tvar $\nabla = \sum_{i=1}^n \frac{\vec{h}_i}{h_i} \frac{\partial}{\partial q_i}$.

Veta 6.2.14 (Kalkulus v (krivočiarych) ortogonálnych súradniciach).

Nech $\phi, \mathbf{F} \in C^1$ (dimenzie 3), potom pre ľubovoľné (krivočiary) ortogonálne súradnice platí

(a)

$$\nabla\phi = \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial q_1}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial q_2}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial q_3} \right)$$

(b)

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (F_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (F_3 h_2 h_1) \right]$$

(c)

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \mathbf{h}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ F_1 h_1 & F_2 h_2 & F_3 h_3 \end{vmatrix}$$

(d)

$$\Delta\phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_2 h_1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial q_3} \right) \right].$$

Problém 6.2.15.

Vyjadrite laplaceov operátor v polárnych, sférických a cylindrických súradniciach. Vyjadrite divergenciu v sférických súradniciach. Vyjadrite rotáciu pre ľubovoľné ortogonálne súradnice (v \mathbb{R}^3).

Poznámka 6.2.16.

V prípade, že nemáme ortogonálny súradnicový systém, musíme pracovať s tzv. kovariantými a kontravariantnými komponentami vektorov (duálne bázy), ktoré vedú k tzv. riemannovskej metrike.